

1. Ile wynosi 60% liczby $\frac{5^4 \cdot 5^6 \cdot 5^2}{(5^5)^2}$?

Szkic rozwiązania. $60\% \cdot \frac{5^4 \cdot 5^6 \cdot 5^2}{(5^5)^2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5^{12}}{5^{10}} = \frac{3}{5} \cdot 5^2 = 15$

□

-
2. Na konkurs matematyczny przyjechało nie więcej niż 50 szkół. Po ogłoszeniu wyników połowa szkół otrzymała w nagrodzie koszulki, $\frac{1}{3}$ szkół otrzymała kalkulatory, $\frac{1}{7}$ szkół otrzymała zestawy LEGO, a pozostałe szkoły otrzymały książki. Ile było tych szkół, które otrzymały książki?

Szkic rozwiązania. s - liczba szkół, x - szukana liczba szkół z książkami. $\frac{1}{2}s + \frac{1}{3}s + \frac{1}{7}s + x = s \implies \frac{41}{42}s + x = s \implies x = \frac{1}{42}s$. $s \leq 50$, więc żeby zachodziła podzielność, $s = 42$ i w konsekwencji $x = 1$. □

-
3. Rozstrzygnij, która liczba jest większa: $\sqrt{2024} + \sqrt{2026}$ czy $2\sqrt{2025}$.

Szkic rozwiązania.

$$(\sqrt{2024} + \sqrt{2026})^2 = 4050 + 2\sqrt{2024 \cdot 2026} = 4050 + 2\sqrt{2025^2 - 1}$$

$$(2\sqrt{2025})^2 = 4 \cdot 2025 = 4050 + 2 \cdot 2025 = 4050 + 2\sqrt{2025^2}$$

Zatem $2\sqrt{2025} > \sqrt{2024} + \sqrt{2026}$.

□

-
4. Rozwiąż układ równań, gdzie x, y, z są liczbami rzeczywistymi.

$$\begin{cases} xy = 8 \\ yz = 20 \\ zx = 10 \end{cases}$$

Szkic rozwiązania. Mnożąc wszystkie równania przez siebie, dostajemy $x^2y^2z^2 = 1600$, więc $xyz = 40$ lub $xyz = -40$. $xyz = 40, xy = 8 \implies z = 5$, i dalej łatwo dostajemy $x = 2, y = 4$. Dla $xyz = -40, xy = 8 \implies z = -5$, i wtedy $x = -2, y = -4$. Odpowiedzią są więc dwie trójki liczb: $(2, 4, 5)$ i $(-2, -4, -5)$. □

-
5. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $AC = BC$. Na odcinku AC zaznaczono punkty X, Y w taki sposób, że $AB = BX = XY$ oraz $BY = YC$. Oblicz miary kątów trójkąta ABC .

Szkic rozwiązania. Oznaczmy $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \alpha$. ABX jest równoramienny, zatem $\sphericalangle AXB = \alpha$, $\sphericalangle ABX = 180^\circ - 2\alpha$ i $\sphericalangle YXB = 180^\circ - \alpha$. BXY jest równoramienny, więc $\sphericalangle BYX = \sphericalangle YBX = \frac{\alpha}{2}$. Wtedy też $\sphericalangle BYC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$. BYC jest równoramienny, zatem $\sphericalangle BCY = \sphericalangle YBC = \frac{\alpha}{4}$. Dostajemy $\alpha = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ABX + \sphericalangle XBY + \sphericalangle YBC = 180^\circ - 2\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} = 180^\circ - \frac{5}{4}\alpha \implies \frac{9}{4}\alpha = 180^\circ$, zatem $\alpha = 80^\circ$, więc kąty ABC to $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$. $\square$

-
6. Na każdym boku kwadratu $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne ABE, BCF, CDG, DAH (wychodzące na zewnątrz). Oblicz pole czworokąta $EFGH$.

Szkic rozwiązania. $EFGH$ jest kwadratem, co wynika z rachunku kątów oraz zauważenia, że trójkąty AEH, BFE, CGF, DHG są przystające. Długość przekątnej $EFGH$ to suma długości boku $ABCD$ i dwóch wysokości trójkątów równobocznych. Niech a będzie długością boku $ABCD$. Przekątna $EFGH$ to zatem $e = a + 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a + a\sqrt{3}$. Dostajemy $P_{EFGH} = \frac{e^2}{2} = \frac{a^2 + 2\sqrt{3}a^2 + 3a^2}{2} = 2a^2 + a^2\sqrt{3}$. $\square$

-
7. Liczby pierwsze p, q są takie, że $7p + q$ oraz $pq + 5$ również są liczbami pierwszymi. Ile mogą wynosić p i q ?

Szkic rozwiązania. Jeżeli p, q są obie nieparzyste, to $pq + 5$ jest parzyste i większe od 2, zatem nie może być pierwsze. W takim razie jedna z liczb p, q jest parzysta i w konsekwencji równa 2.

Jeżeli $p = 2$, to liczby w zadaniu wynoszą $14 + q$ i $2q + 5$. Gdy reszta z dzielenia q przez 3 wynosi 1, to $3 \mid 14 + q$, a jeśli ta reszta wynosi 2, to $3 \mid 2q + 5$. Obie takie liczby są większe od 3 i podzielne przez 3, także nie są pierwsze, więc $3 \mid q$, a zatem $q = 3$. Sprawdzamy, że 17 i 11 faktycznie są pierwsze.

Jeżeli $q = 2$, okazuje się w identyczny sposób, że $p = 3$ i nie ma innych możliwości. Wtedy $7p + q = 23$ i $pq + 5 = 11$, czyli warunki zadania są spełnione. Rozwiązaniami zadania są zatem pary $(2, 3)$ i $(3, 2)$. $\square$